Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

6 класс **Отборочный этап** **2024-2025**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*17 баллов*) Миша, Саша и Дима приняли участие в турнире по шахматам. На троих суммарно у них 14 побед. Известно, что у Саши побед в два раза больше, чем у Миши, а у Димы побед больше, чем у Миши, но меньше, чем у Саши. Определите количество побед Саши в турнире.

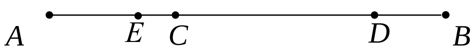
Ответ: 6.

Решение. Если у Миши одна победа, то у Саши две, а у Димы 11. Что не удовлетворяет условию. Если у Миши 2 победы, то у Саши 4, а у Димы 8. Что также не удовлетворяет условию. Если у Миши 3 победы, то у Саши 6, а у Димы 5 побед. Другие варианты не подходят, так как число побед Миши станет больше, чем число побед Димы. Значит, число побед Саши равно 6.

2. (*16 баллов*) На отрезке AB взяты точки C и E, так что, CB=2AC, EB=3AE, а также точка D такая, что длина BD составляет 20% от длины AB. Найдите отношение $\frac{EC}{CD}$.

Ответ: $\frac{5}{28}$.

Решение.



Пусть x – длина отрезка AB. Тогда $AC = \frac{1}{3}x$, $AE = \frac{1}{4}x$. Значит,

$EC = \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x = \frac{1}{12}x$. BD составляет 20% от длины AB, это означает $BD = \frac{1}{5}x$. Тогда $CD = x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{5}x = \frac{7}{15}x$. Получаем $EC : CD = \frac{1}{12}x : \frac{7}{15}x = \frac{5}{28}$.

3. (*17 баллов*) На занятиях по ментальной арифметике учитель попросил Олега складывать в уме последовательные натуральные числа, начиная с 1. В некоторый момент времени учитель остановил Олега и попросил назвать результат. Олег назвал число 477, но результат оказался неверным, так как Олег дважды сложил одно и то же число. Определите, какое число Олег сложил дважды.

Ответ: 12.

Решение. Чисел, которые сложил Олег, не больше 30, так как сумма натуральных чисел от 1 до 31 равна $496 > 477$. Но их и не меньше 30, так как сумма натуральных чисел от 1 до 29 равна 435. И если к этой сумме прибавить самое большое число 29, то получим меньше, чем 477. Значит, последнее число, которое прибавлял Олег, было 30, $1 + 2 + \cdots + 30 = 465$.
Определим, какое число Олег сложил дважды: $477 - 465 = 12$.

4. *(15 баллов)* Из полного бака, ёмкость которого $V = 1{,}5\ \text{м}^3$, начинает выливаться вода со скоростью 3 литра в секунду. Через какое время бак будет полностью пустым?

Ответ: 500 с

Решение:

Скорость выливания:

$3\ \text{литра/с} = 3 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3/\text{с}.$ (7 баллов)

Время:

$t = \frac{1{,}5\ \text{м}^3}{3 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3/\text{с}} = 500\ \text{с}.$ (8 баллов)

5. *(20 баллов)* Плуг, ширина которого $L = 4$ м, везут по полю со скоростью $v = 5\ \text{км/ч}$. Какую площадь он вспашет за $t = 45$ мин?

Ответ: 15000 м^2

Решение:

За 45 минут трактор проезжает:

$l = \frac{3}{4} \cdot 5\ \text{км} = 3{,}75\ \text{км} = 3750\ \text{м}.$ (10 баллов)

Вспаханная площадь:

$S = 3750 \cdot 4 = 15000\ \text{м}^2.$ (10 баллов)

6. *(15 баллов)* Велосипедист проехал 1,35 километра за 15 минут. Определите его скорость в метрах на секунду.

Ответ: 1,5 м/с

Решение:

1,35 километра = 1350 метров (5 баллов)

15 минут = 900 секунд (5 баллов)

Скорость:

$v = \frac{s}{t} = \frac{1350}{900} = 1{,}5\ \text{м/с}.$ (5 баллов)

6 класс | **Отборочный этап** | **2024-2025**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*17 баллов*) Миша, Саша и Дима приняли участие в турнире по шахматам. На троих суммарно у них 13 побед. Известно, что у Саши побед в два раза больше, чем у Миши, а у Димы побед больше, чем у Миши, но меньше, чем у Саши. Определите количество побед Димы в турнире.

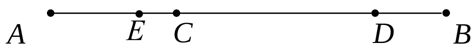
Ответ: 4.

Решение. Если у Миши одна победа, то у Саши две, а у Димы 10 побед. Что не удовлетворяет условию. Если у Миши 2 победы, то у Саши 4, а у Димы 7. Что также не удовлетворяет условию. Если у Миши 3 победы, то у Саши 6, а у Димы 4 победы. Другие варианты не подходят, так как число побед Миши станет не меньше, чем число побед Димы. Значит, число побед Димы равно 4.

2. (*16 баллов*) На отрезке AB взяты точки C и E, так что, CB=2AC, EB=3AE, а также точка D такая, что длина BD составляет 20% от длины AB. Найдите отношение $\frac{EC}{AD}$.

Ответ: $\frac{5}{48}$.

Решение.



Пусть x – длина отрезка AB. Тогда $AC = \frac{1}{3}x$, $AE = \frac{1}{4}x$. Значит, $EC = \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x = \frac{1}{12}x$. BD составляет 20% от длины AB, это означает $AD = \frac{4}{5}x$. Тогда $EC: AD = \frac{1}{12}x : \frac{4}{5}x = \frac{5}{48}$.

3. (*17 баллов*) На занятиях по ментальной арифметике учитель попросил Олега складывать в уме последовательные натуральные числа, начиная с 1. В некоторый момент времени учитель остановил Олега и попросил назвать результат. Олег назвал число 486, но результат оказался неверным, так как Олег дважды сложил одно и то же число. Определите, какое число Олег сложил дважды.

Ответ: 21.

Решение. Чисел, которые сложил Олег, не больше 30, так как сумма натуральных чисел от 1 до 31 равна $496 > 486$. Но их и не меньше 30, так как сумма натуральных чисел от 1 до 29 равна 435. И если к этой сумме прибавить самое большое число 29, то получим меньше, чем 486. Значит, последнее число, которое прибавлял Олег, было 30, $1 + 2 + \cdots + 30 = 465$.
Определим, какое число Олег сложил дважды: $486 - 465 = 21$.

4. *(15 баллов)* Из полного бака, ёмкость которого $V = 2\ \text{м}^3$, начинает выливаться вода со скоростью 0,5 литра в секунду. Через какое время бак будет полностью пустым?

Ответ: 4000 с

Решение:

Скорость выливания:

$0{,}5\ \text{литра/с} = 0{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3/\text{с}.$ (7 баллов)

Время:

$t = \frac{2\ \text{м}^3}{0{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3/\text{с}} = 4000$ с. (8 баллов)

5. *(20 баллов)* Плуг, ширина которого $L = 3{,}5$ м, в езут по полю со скоростью $v = 6\ \text{км/ч}$. Какую площадь он вспашет за $t = 40$ мин?

Ответ: 14000 м^2

Решение:

За 40 минут трактор проезжает:

$l = \frac{2}{3} \cdot 6\ \text{км} = 4\ \text{км} = 4000$ м. (10 баллов)

Вспаханная площадь:

$S = 4000 \cdot 3{,}5 = 14000\ \text{м}^2.$ (10 баллов)

6. *(15 баллов)* Велосипедист проехал 2,7 километра за 15 минут. Определите его скорость в метрах на секунду.

Ответ: 3 м/с

Решение:

2,7 километра = 2700 метров (5 баллов)

15 минут = 900 секунд (5 баллов)

Скорость:

$v = \frac{s}{t} = \frac{2700}{900} = 3\ \text{м/с}.$ (5 баллов)

7 класс **Отборочный этап** **2024-2025**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*16 баллов*) Бабушка Зоя на своём огороде выращивала томаты. 2024 год выдался неурожайным, и на огороде выросло всего 36 плодов помидор. Она попросила внучек Олю и Юлю, собрать помидоры и отсортировать их на красные и зеленые. У Оли каждый второй помидор был зеленый, а у Юли каждый третий. Известно, что Оля собирает помидоры в два раза быстрее, чем Юля. В какой-то момент времени и Оля, и Юля вместе собрали все помидоры. Насколько больше красных помидор собрала Оля, чем Юля?

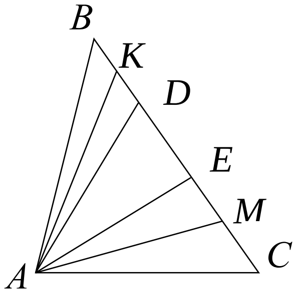
Ответ: 4.

Решение. Пока Оля собирает 6 помидор, Юля собирает 3. При этом Оля собирает только 3 красных помидор из шести, а Юля 2 красных из трёх. Значит, из 9 собранных помидор, ровно 3 красных собирает Оля и 2 – Юля. Тогда Оля соберет $\frac{3}{9}\cdot 36 = 12$ красных, а Юля $\frac{2}{9}\cdot 36 = 8$ красных. То есть Оля собрала на 4 красных помидора больше, чем Юля.

2. (*17 баллов*) В треугольнике ABC на стороне BC взяты две точки D и E, причём, расстояние от точки B до точки D меньше расстояния от точки D до точки C. Расстояние от точки C до точки E меньше расстояния от точки E до точки B, $\angle DAE = 42°$. Из вершины A проведены биссектрисы AK и AM углов BAD и EAC соответственно. Найдите угол KAM, если $\angle BAC = 78°$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: $60°$.

Решение.



Имеем $\angle BAD + \angle EAC = 78° - 42° = 36°$. Так как AK и AM биссектрисы углов, то $\angle KAD + \angle EAM = \frac{1}{2}\cdot 36° = 18°$. Тогда, $\angle KAM = \angle KAD + \angle DAE + \angle EAM = 18° + 42° = 60°$.

3. *(17 баллов)* В корзине лежали яблоки и груши, всего 30 фруктов. Среди любых 12 из них имеется хотя бы одно яблоко, а среди любых 20 фруктов – хотя бы одна груша. Сколько яблок лежало в корзине?

Ответ: 19.

Решение. Так как среди любых 12 фруктов есть хотя бы одно яблоко, то груш не может быть 12 и более, их максимум 11. Так как среди любых 20 фруктов есть хотя бы одна груша, то яблок не может быть 20 и более, их максимум 19. Если груш будет меньше 11 или яблок меньше 19, то фруктов в корзине будет меньше 30. Что противоречит условию. Значит яблок в корзине 19.

4. *(15 баллов)* Самолёт взлетает с движущегося в том же направлении авианосца. Скорость авианосца относительно берега $5\ м/с$. Скорость самолёта относительно палубы авианосца равна $270\ км/ч$. Чему равна скорость самолёта относительно берега?

Ответ: 80 м/с

Решение:

Скорость самолёта относительно палубы 270 км/ч = 75 м/с. (7 баллов)

Скорость самолёта относительно берега 75 м/с + 5 м/с = 80 м/с. (8 баллов)

5. *(20 баллов)* Мы привыкли измерять температуру в градусах Цельсия, в то время как в некоторых странах используются термометры, проградуированные в градусах Фаренгейта. Перевести одни в другие можно с помощью следующей формулы: $°F = °C \cdot \frac{9}{5} + 32$. Если известно, что воду нагрели на $5\ °C$, то определите в градусах Фаренгейта сколько составило нагревание воды.

Ответ: 9 градусов

Решение:

Допустим начальная температура:

$°F_0 = °C_0 \cdot \frac{9}{5} + 32.$ (8 баллов)

Следовательно, конечная температура:

$°F_к = (°C_0 + 5) \cdot \frac{9}{5} + 32.$ (8 баллов)

Получаем, что их разность в градусах Фаренгейта:

$\Delta°F = 9$ градусов. (4 балла)

6. *(15 баллов)* Конструкция, изображенная на рисунке, однородный стержень с установленным на одном из концов маленьким грузом, находится в равновесии. Опора располагается на расстоянии $\frac{1}{3}$ длины стержня от его левого конца. Определите массу M стержня, если известно, что масса груза $m = 1$ кг.

Ответ: 2 кг

Решение:

Условие равновесия:

$mg \cdot \frac{1}{3} l = Mg \cdot \frac{1}{6} l.$ (10 баллов)

Получаем, что масса стержня:

$M = 2m = 2$ кг. (5 баллов)

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*17 баллов*) Бабушка Зоя на своём огороде выращивала томаты. 2024 год выдался неурожайным, и на огороде выросло всего 45 плодов помидор. Она попросила внучек Олю и Юлю, собрать помидоры и отсортировать их на красные и зеленые. У Оли каждый второй помидор был зеленый, а у Юли каждый третий. Известно, что Оля собирает помидоры в два раза быстрее, чем Юля. В какой-то момент времени и Оля, и Юля вместе собрали все помидоры. Насколько больше красных помидор собрала Оля, чем Юля?

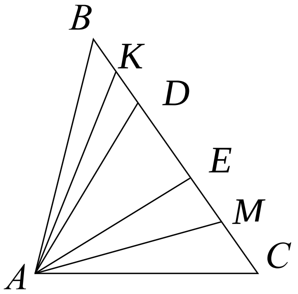
Ответ: 5.

Решение. Пока Оля собирает 6 помидор, Юля собирает 3. При этом Оля собирает только 3 красных помидора из шести, а Юля 2 красных из трёх. Значит, из 9 собранных помидор, ровно 3 красных собирает Оля и 2 – Юля. Тогда Оля соберет $\frac{3}{9}\cdot 45 = 15$ красных, а Юля $\frac{2}{9}\cdot 45 = 10$ красных. То есть Оля собрала на 5 красных помидор больше, чем Юля.

2. (*16 баллов*) В треугольнике ABC на стороне BC взяты две точки D и E, причём расстояние от точки B до точки D меньше расстояния от точки D до точки C. Расстояние от точки C до точки E меньше расстояния от точки E до точки B, $\angle DAE = 41°$. Из вершины A проведены биссектрисы AK и AM углов BAD и EAC соответственно. Найдите угол KAM, если $\angle BAC = 75°$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: $58°$.

Решение.



Имеем $\angle BAD + \angle EAC = 75° - 41° = 34°$. Так как AK и AM биссектрисы углов, то $\angle KAD + \angle EAM = \frac{1}{2}\cdot 34° = 17°$. Тогда,

$$\angle KAM = \angle KAD + \angle DAE + \angle EAM = 17° + 41° = 58°.$$

3. (*17 баллов*) В корзине лежали яблоки и груши, всего 28 фруктов. Среди любых 10 из них имеется хотя бы одно яблоко, а среди любых 20 фруктов – хотя бы одна груша. Сколько груш лежало в корзине?

Ответ: 9.

Решение. Так как среди любых 10 фруктов есть хотя бы одно яблоко, то груш не может быть 10 и более, их максимум 9. Так как среди любых 20 фруктов есть хотя бы одна груша, то яблок не может быть 20 и более, их максимум 19. Если груш будет меньше 9 или яблок меньше 19, то фруктов в корзине будет меньше 28. Что противоречит условию. Значит, груш в корзине 9.

4. *(15 баллов)* Самолёт взлетает с движущегося в том же направлении авианосца. Скорость авианосца относительно берега 5 м/с. Скорость самолёта относительно палубы авианосца равна 216 км/ч. Чему равна скорость самолёта относительно берега?

Ответ: 65 м/с

Решение:

Скорость самолёта относительно палубы 216 км/ч = 60 м/с. (7 баллов)

Скорость самолёта относительно берега 60 м/с + 5 м/с = 65 м/с. (8 баллов)

5. *(20 баллов)* Мы привыкли измерять температуру в градусах Цельсия, в то время как в некоторых странах используются термометры, проградуированные в градусах Фаренгейта. Перевести одни в другие можно с помощью следующей формулы: $°F = °C \cdot \frac{9}{5} + 32$. Если известно, что воду нагрели на 10 °C, то определите в градусах Фаренгейта сколько составило нагревание воды.

Ответ: 18 градусов

Решение:

Допустим начальная температура:

$°F_0 = °C_0 \cdot \frac{9}{5} + 32.$ (8 баллов)

Следовательно, конечная температура:

. $°F_к = (°C_0 + 10) \cdot \frac{9}{5} + 32.$ (8 баллов)

Получаем, что их разность в градусах Фаренгейта:

$\Delta°F = 18$ градусов. (4 балла)

6. *(15 баллов)* Конструкция, изображенная на рисунке, однородный стержень с установленным на одном из концов маленьким грузом, находится в равновесии. Опора располагается на расстоянии $\frac{1}{3}$ длины стержня от его левого конца. Определите массу M стержня, если известно, что масса груза $m = 1{,}5$ кг.

Ответ: 3 кг

Решение:

Условие равновесия:

$mg \cdot \frac{1}{3}l = Mg \cdot \frac{1}{6}l.$ (10 баллов)

Получаем, что масса стержня:

$M = 2m = 3$ кг. (5 баллов)

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*17 баллов*) Двум малярам Диме и Олегу поручили выкрасить фасад дома. Они разделили фасад на две равные части и одновременно приступили к работе. Дима использовал краскопульт, а Олег красил фасад вручную. Известно, что Дима красит краскопультом в три раза быстрее, чем Олег вручную. Через некоторое время они одновременно поменяли способ покраски: Дима стал красить вручную, а Олег краскопультом. При этом производительность каждого изменилась в два раза: у Олега увеличилась в два раза, а у Димы уменьшилась. Покраску своей части фасада они закончили одновременно. Сколько квадратных метров покрасил краскопультом Дима, если весь фасад дома составляет 300 м^2?

Ответ: 50.

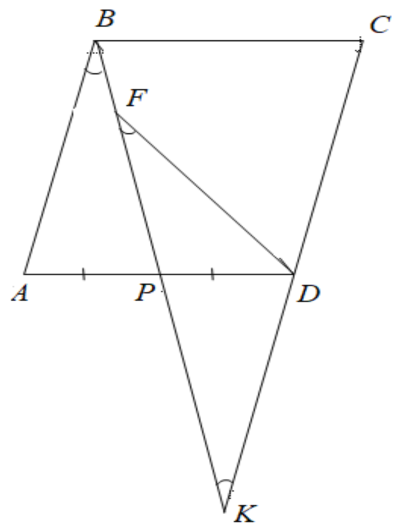
Решение. Пусть x – производительность Олега, когда он красил вручную. Тогда производительность Димы краскопультом равна $3x$. После того, как они поменялись способом покраски: производительность Олега стала $2x$, а Димы $1{,}5x$. Следовательно, производительность Олега стала в $\frac{4}{3}$ раза больше.

Пусть S м^2 покрасил Олег вручную, тогда Дима покрасил $3S$ краскопультом. $150 - S$ покрасил Олег краскопультом, $150 - 3S$ – покрасил Дима вручную. Так как время одинаковое, то $\frac{150-S}{150-3S} = \frac{4}{3}$, $S = \frac{50}{3}$. Дима покрасил краскопультом $3S = 50$ м^2.

2. (*16 баллов*). В параллелограмме $ABCD$ точка P середина AD. На отрезке BP взяли точку F, такую, что $\angle DFP = \angle ABP$. Найдите длину отрезка FD, если стороны параллелограмма $AB = 5, BC = 6$.

Ответ: 5.

Решение.



Продлим прямую BP за точку P до её пересечения с прямой CD. Получим точку K. Рассмотрим треугольники ABP и DKP. Так как $AP = PD, \angle APB = \angle DPK$ и $\angle BAP = \angle PDK$, то $\Delta ABP = \Delta DKP$ и $KD = AB$. ΔFDK – равнобедренный, так как $\angle PFD = \angle DKP$, следовательно, $FD = KD = AB = 5$.

3. (*17 баллов*) Палиндром – это число, либо слово, либо предложение, которое одинаково читается слева направо и справа налево, например, число 12321. Определите количество пятизначных палиндромов, делящихся на 5, если известно, что в палиндроме только две нечётные цифры.

Ответ: 25.

Решение. Чтобы число делилось на 5, оно должно оканчиваться на 0 или 5. Так как 0 не может быть первой цифрой, то остается один вариант 5. Следовательно, пятизначный палиндром будет иметь вид: $5ABA5$, где A, B – чётные цифры (0, 2, 4, 6, 8 – всего 5 вариантов). Таким образом, количество пятизначных палиндромов, делящихся на 5, где A, B – чётные цифры равно $5 \cdot 5 = 25$.

4. *(15 баллов)* Первую половину пути скутер проехал со скоростью $v_1 = 20$ км/ч, а оставшееся расстояние со скоростью $v_2 = 30$ км/ч. Определите среднюю скорость на всем пути.

Ответ: 24 км/ч

Решение:

Средняя скорость:

$v_{\text{ср}} = \frac{s}{t}$, (5 баллов)

где $s = s_1 + s_2 = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s$

и $t = t_1 + t_2 = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} = \frac{s}{2v_1} + \frac{s}{2v_2}$. (5 баллов)

Получаем:

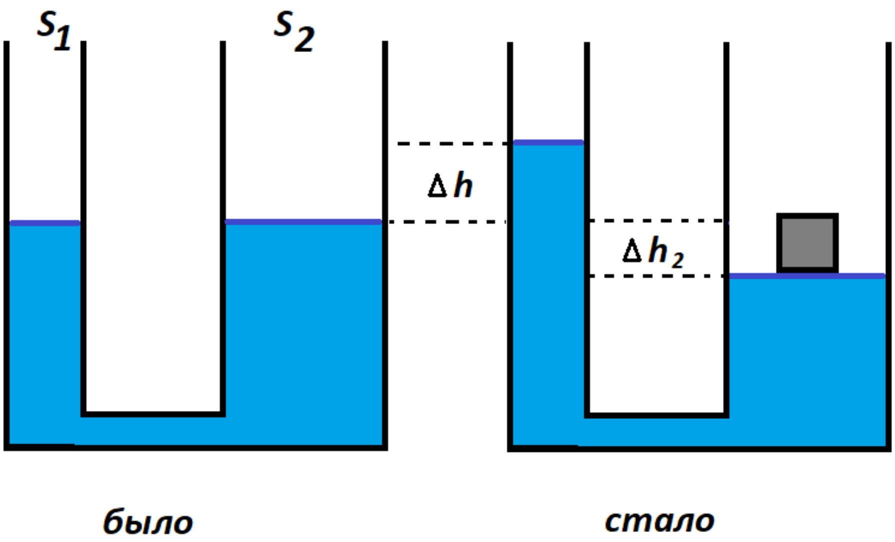
$v_{\text{ср}} = \frac{\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s}{\frac{s}{2v_1} + \frac{s}{2v_2}} = \frac{2v_1v_2}{v_1+v_2} = \frac{2\cdot 20\cdot 30}{20+30} = 24$ км/ч. (5 баллов)

5. *(20 баллов)* Два сообщающихся сосуда, площадью сечения $S_1 = 10$ см^2 и $S_2 = 20$ см^2 закрыты невесомыми поршнями. Под поршнями находится жидкость с плотностью $\rho = 1500$ кг/м^3. На сколько поднимется один из поршней, если на другой поставить гирьку массой $m = 450$ г.

Ответ: 0,1 м

Решение:

Если в одном сосуде поршень поднялся на Δh, то в другом он опустился на Δh_2.



При этом:

$\Delta h_2 \cdot S_2 = \Delta h \cdot S_1.$ (5 баллов)

Условие равновесия для конечной ситуации:

$\frac{mg}{S_2} = \rho g(\Delta h + \Delta h_2) = \rho g\left(\Delta h + \frac{\Delta h \cdot S_1}{S_2}\right).$ (10 баллов)

Получаем:

$\Delta h = \frac{m}{\rho(S_1+S_2)} = \frac{0{,}45}{1500\cdot(30\cdot 10^{-4})} = 0{,}1$ м. (5 баллов)

6. *(15 баллов)* По дороге параллельной железнодорожному пути движется мотоциклист со скоростью 108 км/ч. В некоторый момент времени он догоняет поезд длиной 120 м и обгоняет его за 10 с. Определите скорость поезда.

Ответ: 18 м/с

Решение:

Скорость мотоциклиста 108 км/ч = 30 м/с. (5 баллов)

При обгоне:

$\frac{l}{t} = (v_м - v_п) = \frac{120}{10} = 12$ м/с. (5 баллов)

Получаем, что скорость поезда:

$v_п = 30 - 12 = 18$ м/с. (5 баллов)

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*17 баллов*) Двум малярам Диме и Олегу поручили выкрасить фасад дома. Они разделили фасад на две равные части и одновременно приступили к работе. Дима использовал краскопульт, а Олег красил фасад вручную. Известно, что Дима красит краскопультом в три раза быстрее, чем Олег вручную. Через некоторое время они одновременно поменяли способ покраски: Дима стал красить вручную, а Олег краскопультом. При этом производительность каждого изменилась в два раза: у Олега увеличилась в два раза, а у Димы уменьшилась. Покраску своей части фасада они закончили одновременно. Сколько квадратных метров покрасил краскопультом Дима, если весь фасад дома составляет 330 м^2?

Ответ: 55.

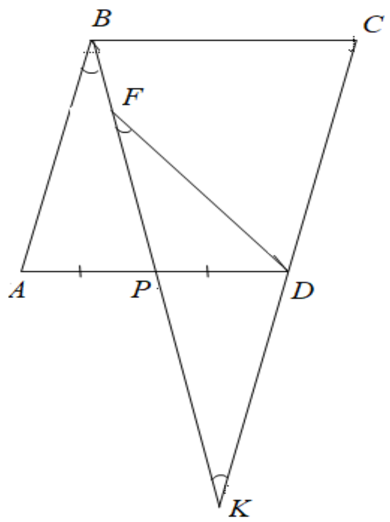
Решение. Пусть x – производительность Олега, когда он красил вручную. Тогда производительность Димы краскопультом равна $3x$. После того, как они поменялись способом покраски: производительность Олега стала $2x$, а Димы $1{,}5x$. Следовательно, производительность Олега стала в $\frac{4}{3}$ раза больше.

Пусть S м^2 покрасил Олег вручную, тогда Дима покрасил $3S$ краскопультом. $165 - S$ покрасил Олег краскопультом, $165 - 3S$ – покрасил Дима вручную. Так как время одинаковое, то $\frac{165-S}{165-3S} = \frac{4}{3}$, $S = \frac{55}{3}$. Дима покрасил краскопультом $3S = 55$ м^2.

2. (*16 баллов*) В параллелограмме $ABCD$ точка P середина AD. На отрезке BP взяли точку F, такую, что $\angle DFP = \angle ABP$. Найдите длину отрезка FD, если стороны параллелограмма $AB = 7, BC = 9$.

Ответ: 7.

Решение.



Продлим прямую BP за точку P до её пересечения с прямой CD. Получим точку K. Рассмотрим треугольники ABP и DKP. Так как $AP = PD,\ \angle APB = \angle DPK$ и $\angle BAP = \angle PDK$, то $\Delta ABP = \Delta DKP$ и $KD = AB$. ΔFDK – равнобедренный, так как $\angle PFD = \angle DKP$, и, следовательно, $FD = KD = AB = 7$.

3. (*17 баллов*) Палиндром – это число, либо слово, либо предложение, которое одинаково читается слева направо и справа налево, например, число 1234321. Определите количество семизначных палиндромов, делящихся на 5, если известно, что в палиндроме только две нечётные цифры.

Ответ: 125.

Решение. Чтобы число делилось на 5, оно должно оканчиваться на 0 или 5. Так как 0 не может быть первой цифрой, то остается один вариант 5. Следовательно, семизначный палиндром будет иметь вид: $5ABCBA5$, где A, B, C – чётные цифры (0, 2, 4, 6, 8 – всего 5 вариантов). Таким образом, количество семизначных палиндромов, делящихся на 5, где A, B, C – чётные цифры равно $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

4. *(15 баллов)* Первую половину пути грузовик проехал со скоростью $v_1 = 30$ км/ч, а оставшееся расстояние со скоростью $v_2 = 50$ км/ч. Определите среднюю скорость на всем пути.

Ответ: 37,5 км/ч

Решение:

Средняя скорость:

$v_{\text{ср}} = \frac{s}{t}$, (5 баллов)

где $s = s_1 + s_2 = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s$

и $t = t_1 + t_2 = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} = \frac{s}{2v_1} + \frac{s}{2v_2}$. (5 баллов)

Получаем:

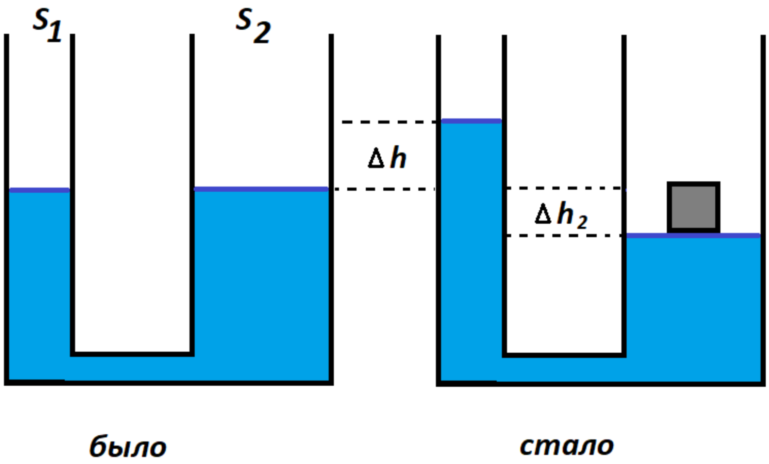
$$v_{\text{ср}} = \frac{\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s}{\frac{s}{2v_1} + \frac{s}{2v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = \frac{2 \cdot 30 \cdot 50}{30 + 50} = 37{,}5 \text{ км/ч}.$$ (5 баллов)

5. *(20 баллов)* Два сообщающихся сосуда, площадью сечения $S_1 = 20$ см^2 и $S_2 = 40$ см^2 закрыты невесомыми поршнями. Под поршнями находится жидкость с плотностью $\rho = 1200$ кг/м^3. На сколько поднимется один из поршней, если на другой поставить гирьку массой $m = 720$ г.

Ответ: 0,1 м

Решение:

Если в одном сосуде поршень поднялся на Δh, то в другом он опустился на Δh_2.



При этом:

$\Delta h_2 \cdot S_2 = \Delta h \cdot S_1.$ (5 баллов)

Условие равновесия для конечной ситуации:

$\frac{mg}{S_2} = \rho g(\Delta h + \Delta h_2) = \rho g\left(\Delta h + \frac{\Delta h \cdot S_1}{S_2}\right).$ (10 баллов)

Получаем:

$\Delta h = \frac{m}{\rho(S_1+S_2)} = \frac{0{,}72}{1200\cdot(60\cdot10^{-4})} = 0{,}1$ м. (5 баллов)

6. *(15 баллов)* По дороге параллельной железнодорожному пути движется мотоциклист со скоростью 90 км/ч. В некоторый момент времени он догоняет поезд длиной 150 м и обгоняет его за 10 с. Определите скорость поезда.

Ответ: 10 м/с

Решение:

Скорость мотоциклиста 90 км/ч = 25 м/с. (5 баллов)

При обгоне:

$\frac{l}{t} = (v_{\text{м}} - v_{\text{п}}) = \frac{150}{10} = 15$ м/с. (5 баллов)

Получаем, что скорость поезда:

$v_{\text{п}} = 25 - 15 = 10$ м/с. (5 баллов)

9 класс **Отборочный этап** **2024-2025**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*16 баллов*) Каждый из двух девятых классов решил закупить некоторое количество упаковок с кормом для приюта «Пёс и кот», всего 18 упаковок. В результате оказалось, что 9«А» закупил упаковок на 25% больше, чем планировал, а 9«Б» – на 20% больше, чем планировал. Сколько упаковок закупил 9«А» класс?

Ответ: 10.

Решение. Пусть сначала 9«А» класс хотел закупить n упаковок корма, а 9«Б» – m упаковок. В итоге 9«А» закупил $\frac{5}{4}n$, а 9«Б» – $\frac{6}{5}m$. Следовательно, n кратно 4, а m кратно 5. То есть n=4, 8, …; m=5, 10,… .Учитывая, что n+m=18, находим, что n=8, m=10. Получаем, что 9«А» закупил 10 упаковок корма.

2. (*17 баллов*) Найдите все целые значения p, при которых выражение

$$\frac{2p^3+p^2-p+6}{2p-1}$$

принимает целое значение.

Ответ: – 1; 0; 1; 2.

Решение. Преобразуем выражение:

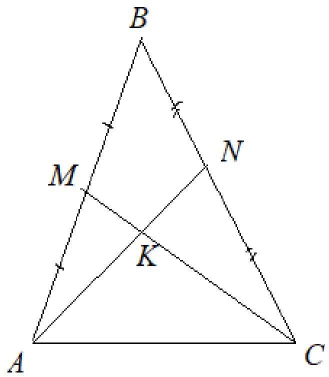
$$\frac{2p^3+p^2-p+6}{2p-1}=\frac{(p^2+p)(2p-1)+6}{2p-1}=p^2+p+\frac{6}{2p-1}.$$

Для того, чтобы выражение принимало целое значение при целых p необходимо, чтобы дробь была целым числом. Это возможно, когда знаменатель дроби является делителем 6. Учитывая то, что знаменатель нечётен, получаем возможные варианты: $2p-1=\pm1$ или $2p-1=\pm3$. Получаем ответ.

3. (*17 баллов*) В треугольнике две стороны равны 6 и 8. Медианы, проведённые к этим сторонам взаимно перпендикулярны. Найдите третью сторону треугольника.

Ответ: $2\sqrt{5}$.

Решение. Пусть в треугольнике ABC сторона AB=6, сторона BC=8. Медианы треугольника делятся точкой пересечения в отношении 2:1, считая от вершины. Пусть у медианы CM $MK=x$, тогда $KC=2x$, а у медианы AN $KN=y$, $AK=2y$. Тогда в прямоугольных треугольниках AKM и NKC по теореме Пифагора получаем: $\begin{cases} x^2+4y^2=9, \\ 4x^2+y^2=16. \end{cases}$ Умножив первое уравнение на 4, и вычитая второе уравнение, получаем $15y^2=20$, то есть $y^2=\frac{4}{3}$.



Тогда $x^2=9-\frac{16}{3}=\frac{11}{3}$. В прямоугольном треугольнике AKC имеем $\mathrm{AC}^2=4x^2+4y^2=4\left(\frac{11}{3}+\frac{4}{3}\right)=20$. Получаем ответ $AC=2\sqrt{5}$.

4. *(15 баллов)* Шарик всплывает с постоянной скоростью в жидкости, плотность которой в 4 раза больше плотности материала шарика. Масса шарика 10 грамм. Определите силу сопротивления, которая действует на шарик.

Ответ: 0,3 Н

Решение:

Второй закон Ньютона:

$4\rho gV-mg-F_{\text{с}}=0.$ (8 баллов)

Получаем:

$F_{\text{с}}=3mg=0{,}3$ Н. (7 баллов)

5. *(20 баллов)* Материальная точка, масса которой 2 кг, имела начальную скорость $v_0=3$ м/с. Она остановилась в результате равноускоренного торможения. Найдите её кинетическую энергию на половине пути.

Ответ: 4,5 Дж

Решение:

Уравнение движения:

$S = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$. (5 баллов)

Получаем:

$\frac{v^2 - 3^2}{2a} = \frac{0^2 - v^2}{2a}$. (5 баллов)

$v = \frac{3}{\sqrt{2}}$ м/с. (5 баллов)

В результате, кинетическая энергия:

$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{2 \cdot 3^2}{2 \cdot 2} = 4{,}5$ Дж. (5 баллов)

6. *(15 баллов)* В сообщающиеся сосуды налита ртуть, а поверх нее в один сосуд налит столб масла высотой $h_1 = 50$ см, в другой – столб керосина высотой $h_2 = 18$ см. Определите разность h уровней ртути в обоих сосудах. (Плотность ртути $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3, масла - $\rho_1 = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3, керосина - $\rho_2 = 0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3).

Ответ: 2,25 см

Решение:

Условие равновесия:

$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 + \rho g h$.

Получаем:

$h = \frac{\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2}{\rho} = \frac{900 \cdot 50 - 800 \cdot 18}{13600} = 2{,}25$ см.

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*16 баллов*) Каждый из двух девятых классов решил закупить некоторое количество упаковок с кормом для приюта «Пёс и кот», всего 22 упаковки. В результате оказалось, что 9«А» закупил упаковок на 25% больше, чем планировал, а 9«Б» – на 20% больше, чем планировал. Сколько упаковок закупил 9«Б» класс?

Ответ: 12.

Решение. Пусть сначала 9«А» класс хотел закупить n упаковок корма, а 9«Б» – m упаковок. В итоге 9«А» закупил $\frac{5}{4}n$, а 9«Б» – $\frac{6}{5}m$. Следовательно, n кратно 4, а m кратно 5. То есть n=4, 8, …; m=5, 10,… .Учитывая, что n+m=22, находим, что n=12, m=10. Получаем, что 9«Б» закупил 12 упаковок корма.

2. (*17 баллов*) Найдите сумму всех целых значений k, при которых выражение

$$\frac{k^3+k^2-2k+4}{k+2}$$

принимает целое значение.

Ответ: –12.

Решение. Преобразуем выражение:

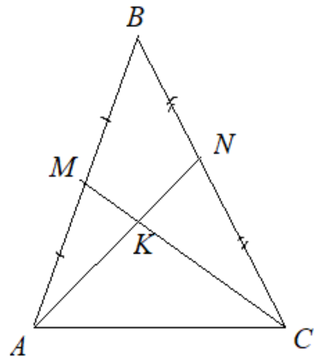
$$\frac{k^3+k^2-2k+4}{k+2}=\frac{(k^2-k)(k+2)+4}{k+2}=k^2-k+\frac{4}{k+2}.$$

Для того, чтобы выражение принимало целое значение при целых k необходимо, чтобы дробь была целым числом. Это возможно, когда знаменатель дроби является делителем 4. Получаем возможные варианты: $k+2=\pm 1$; $k+2=\pm 2$; $k+2=\pm 4$. Следовательно, k=–6; –4; –3; –1; 0; 2. Сумма этих значений –12.

3. (*17 баллов*) В треугольнике две стороны равны 8 и 10. Медианы, проведённые к этим сторонам взаимно перпендикулярны. Найдите третью сторону треугольника.

Ответ: $\frac{2\sqrt{205}}{5}$.

Решение. Пусть в треугольнике *ABC* сторона *AB*=8, сторона *BC*=10. Медианы треугольника делятся точкой пересечения в отношении 2:1, считая от вершины. Пусть у медианы *CM* *MK*=*x*, тогда *KC*=2*x*, а у медианы *AN* *KN*=*y*, *AK*=2*y*. Тогда в прямоугольных треугольниках *AKM* и *NKC* по теореме Пифагора получаем: $\begin{cases} x^2+4y^2=16, \\ 4x^2+y^2=25. \end{cases}$ Умножив первое уравнение на 4, и вычитая второе уравнение, получаем $15y^2=39$, то есть $y^2=\frac{13}{5}$.



Тогда $x^2=16-\frac{52}{5}=\frac{28}{5}$. В прямоугольном треугольнике *AKC* имеем $\mathrm{AC}^2=4x^2+4y^2=4\left(\frac{13}{5}+\frac{28}{5}\right)=\frac{164}{5}$. Получаем ответ *AC*=$\frac{2\sqrt{205}}{5}$.

4. *(15 баллов)* Шарик всплывает с постоянной скоростью в жидкости, плотность которой в 3 раза больше плотности материала шарика. Масса шарика 50 грамм. Определите силу сопротивления, которая действует на шарик.

Ответ: 1 Н

Решение:

Второй закон Ньютона:

$3\rho gV-mg-F_c=0.$ (8 баллов)

Получаем:

$F_c=2mg=1$ Н. (7 баллов)

5. *(20 баллов)* Материальная точка, масса которой 4 кг, имела начальную скорость $v_0=4$ м/с. Она остановилась в результате равноускоренного торможения. Найдите её кинетическую энергию на половине пути.

Ответ: 16 Дж

Решение:

Уравнение движения:

$S=\frac{v^2-v_0^2}{2a}.$ (5 баллов)

Получаем:

$\frac{v^2-4^2}{2a} = \frac{0^2-v^2}{2a}$. (5 баллов)

$v = \frac{4}{\sqrt{2}}$ м/с. (5 баллов)

В результате, кинетическая энергия:

$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{4 \cdot 4^2}{2 \cdot 2} = 16$ Дж. (5 баллов)

6. *(15 баллов)* В сообщающиеся сосуды налита ртуть, а поверх нее в один сосуд налит столб масла высотой $h_1 = 75$ см, в другой – столб керосина высотой $h_2 = 24$ см. Определите разность h уровней ртути в обоих сосудах. (Плотность ртути $\rho = 13{,}8 \cdot 10^3$кг/м^3, масла - $\rho_1 = 0{,}9 \cdot 10^3$кг/м^3, керосина - $\rho_2 = 0{,}8 \cdot 10^3$кг/м^3).

Ответ: 3,5 см

Решение:

Условие равновесия:

$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 + \rho g h.$

Получаем:

$h = \frac{\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2}{\rho} = \frac{900 \cdot 75 - 800 \cdot 24}{13800} = 3{,}5$ см.

10 класс **Отборочный этап** **2024-2025**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*16 баллов*) Решите неравенство $(4x-5-x^2)(x^4-8x^2+18) \geq -2$.

Ответ: 2.

Решение. Исходное неравенство равносильно неравенству:

$$((x-2)^2+1)((x^2-4)^2+2) \leq 2.$$

Первый множитель не менее 1 при любых $x \in \boldsymbol{R}$, второй множитель не менее 2 при любых $x \in \boldsymbol{R}$. Следовательно, произведение не менее 2. Неравенство выполняется тогда и только тогда, когда первый множитель равен 1, а второй 2. Это происходит при x=2.

2. (*17 баллов*) Скоростной поезд «Комета» отправляется из города N в город M. По пути поезд делает несколько остановок. Из города N выехало 2024 пассажира. На первой остановке в поезд сели 5 пассажиров, а на каждой следующей остановки на 3 пассажира больше, чем на предыдущей. Кроме того на каждой остановке выходят 30 пассажиров. Сколько остановок сделал поезд во время пути, если в город M прибыло 2094 пассажиров?

Ответ: 20.

Решение. Обозначим количество остановок поезда n. Количество пассажиров, севших в поезд на всех остановках – сумма арифметической прогрессии, первый член которой равен 5, разность прогрессии – 3. Получаем, что всего таких пассажиров $\frac{10+3(n-1)}{2} \cdot n$. Количество человек, вышедших на всех остановках равно $30n$. Получаем уравнение:

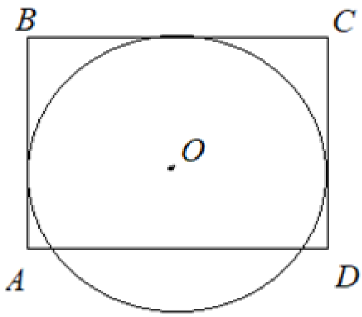
$$2024 + \frac{10+3(n-1)}{2} \cdot n - 30n = 2094.$$

После преобразований получаем уравнение $3n^2 - 53n - 140 = 0$, корни которого $n_1 = 20, n_2 = -\frac{7}{3}$ (посторонний). Итак, поезд сделал 20 остановок.

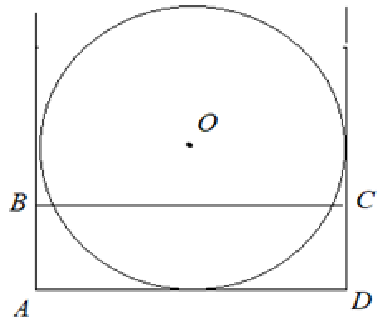
3. (*17 баллов*) Окружность касается прямых, на которых лежат три стороны прямоугольника, и пересекает четвертую сторону прямоугольника. Сторона, которую пересекает окружность равна 10, а её отрезок, заключенный внутри окружности, равен 8. Найдите наименьшую возможную площадь прямоугольника.

Ответ: 20.

Решение. Возможны две конфигурации, удовлетворяющие условию задачи: центр окружности находится внутри прямоугольника либо центр находится вне прямоугольника.

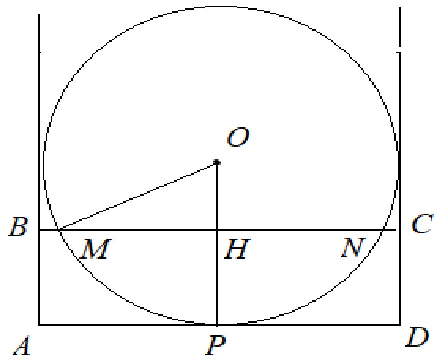


а) Первый случай



б) Второй случай

Для первого случая вторая сторона прямоугольника больше радиуса окружности, для второго случая – меньше радиуса. По условию задачи требуется найти наименьшую возможную площадь прямоугольника, значит, будем решать задачу для второй конфигурации.



По условию задачи *AD*=*BC*=10, *MN*=8. Радиус окружности *OM*=*AP*=5. Из треугольника *OMH* по теореме Пифагора находим *OH*=3. Тогда *AB*=*PH*=*OP*– *OH*=5–3=2. Следовательно, площадь прямоугольника равна 20.

4. *(15 баллов)* Груз взвесили на неравноплечных весах. Положив его на одну чашу весов, получили результат $m_1 = 2$ кг. Положив груз на другую чашу, получили $m_2 = 4{,}5$ кг. Какова истинная масса тела? Массой весов пренебречь.

Ответ: 3 кг

Решение:

Условия равновесия:

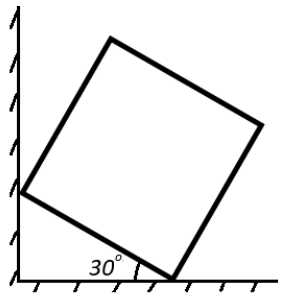
$m_1 g l_1 = m g l_2.$ (5 баллов)

$m g l_1 = m_2 g l_2.$ (5 баллов)

Получаем:

$m = \sqrt{m_1 m_2} = \sqrt{2 \cdot 4{,}5} = 3$ кг. (5 баллов)

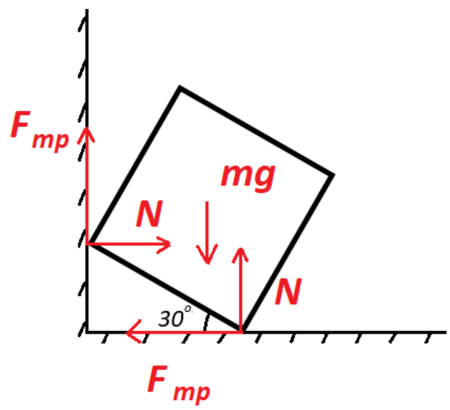
5. *(20 баллов)* Однородный кубик прислонен к стенке как показано на рисунке. Силы трения между кубиком и стенкой и между кубиком и полом равны между собой $F_{\text{тр}1} = F_{\text{тр}2} = 10$ Н. Силы реакций со стороны стенки и пола также равны между собой $N_1 = N_2$. Определите массу кубика. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2



Ответ: 2 кг

Решение:

Расставим силы, действующие на кубик.



Из второго закона Ньютона получаем:

$F_{\text{тр}} = N.$

$F_{\text{тр}} + N = mg.$

Получаем, что:

$m = \frac{2F_{\text{тр}}}{g} = \frac{2\cdot 10}{10} = 2$ кг.

6. *(15 баллов)* Камень бросили с высоты h со скоростью $v_0 = 10$ м/с под углом к горизонту. Через $t = 4$ с камень упал на горизонтальную поверхность Земли. С учетом того, что минимальная скорость камня за время полета $v_{\text{мин}} = 6$ м/с, определите значение h. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Ответ: 48 м

Решение:

Минимальная скорость:

$v_{\text{мин}} = v_0 \cos\alpha = 6$ м/с. (3 балла)

Следовательно:

$v_0 \sin\alpha = \sqrt{v_0^2 - (v_0 \cos\alpha)^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ м/с. (5 баллов)

Уравнение движения:

$y = 0 = h + v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{g}{2} t^2 = h + 8 \cdot 4 - 5 \cdot 4^2$. (5 баллов)

Получаем: $h = 48$ м. (2 балла)

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*16 баллов*) Решите неравенство $(6x-11-x^2)(x^4-18x^2+84) \geq -6$.

Ответ: 3.

Решение. Исходное неравенство равносильно неравенству:

$$((x-3)^2+2)((x^2-9)^2+3) \leq 6.$$

Первый множитель не менее 2 при любых $x \in \boldsymbol{R}$, второй множитель не менее 3 при любых $x \in \boldsymbol{R}$. Следовательно, произведение не менее 6. Неравенство выполняется тогда и только тогда, когда первый множитель равен 2, а второй 3. Это происходит при x=3.

2. (*17 баллов*) Скоростной поезд «Комета» отправляется из города N в город M. По пути поезд делает несколько остановок. Из города N выехало 2024 пассажира. На первой остановке в поезд сели 5 пассажиров, а на каждой следующей остановки на 3 пассажира больше, чем на предыдущей. Кроме того на каждой остановке выходят 30 пассажиров. Сколько остановок сделал поезд во время пути, если в город M прибыло 2167 пассажиров?

Ответ: 22.

Решение. Обозначим количество остановок поезда n. Количество пассажиров, севших в поезд на всех остановках – сумма арифметической прогрессии, первый член которой равен 5, разность прогрессии – 3. Получаем, что всего таких пассажиров $\frac{10+3(n-1)}{2} \cdot n$. Количество человек, вышедших на всех остановках равно $30n$. Получаем уравнение:

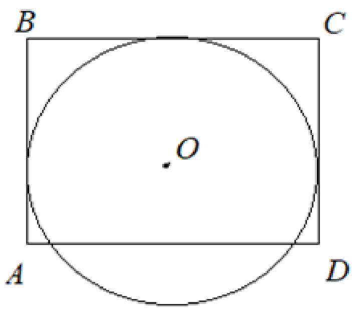
$$2024+\frac{10+3(n-1)}{2} \cdot n-30n=2167.$$

После преобразований получаем уравнение $3n^2-53n-286=0$, корни которого $n_1=22, n_2=-\frac{13}{3}$ (посторонний). Итак, поезд сделал 22 остановки.

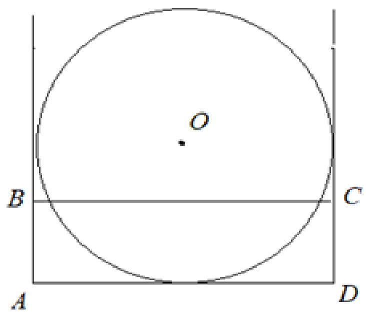
3. (*17 баллов*) Окружность касается прямых, на которых лежат три стороны прямоугольника, и пересекает четвертую сторону прямоугольника. Сторона, которую пересекает окружность равна 20, а её отрезок, заключенный внутри окружности, равен 16. Найдите наименьшую возможную площадь прямоугольника.

Ответ: 80.

Решение. Возможны две конфигурации, удовлетворяющие условию задачи: центр окружности находится внутри прямоугольника либо центр находится вне прямоугольника.

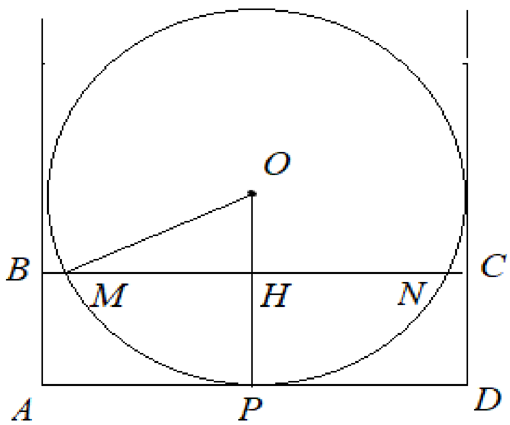


а) Первый случай



б) Второй случай

Для первого случая вторая сторона прямоугольника больше радиуса окружности, для второго случая – меньше радиуса. По условию задачи требуется найти наименьшую возможную площадь прямоугольника, значит, будем решать задачу для второй конфигурации.



По условию задачи $AD=BC=20$, $MN=16$. Радиус окружности $OM=AP=10$. Из треугольника OMH по теореме Пифагора находим $OH=6$. Тогда $AB=PH=OP-OH=10-6=4$. Следовательно, площадь прямоугольника равна 80.

4. *(15 баллов)* Груз взвесили на неравноплечных весах. Положив его на одну чашу весов, получили результат $m_1 = 8$ кг. Положив груз на другую чашу, получили $m_2 = 2$ кг. Какова истинная масса тела? Массой весов пренебречь.

Ответ: 4 кг

Решение:

Условия равновесия:

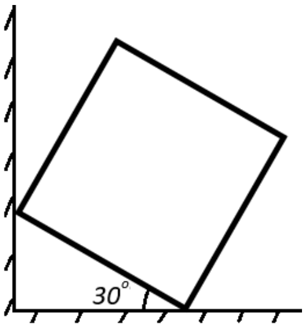
$m_1 g l_1 = m g l_2.$ (5 баллов)

$m g l_1 = m_2 g l_2.$ (5 баллов)

Получаем:

$m = \sqrt{m_1 m_2} = \sqrt{8 \cdot 2} = 4$ кг. (5 баллов)

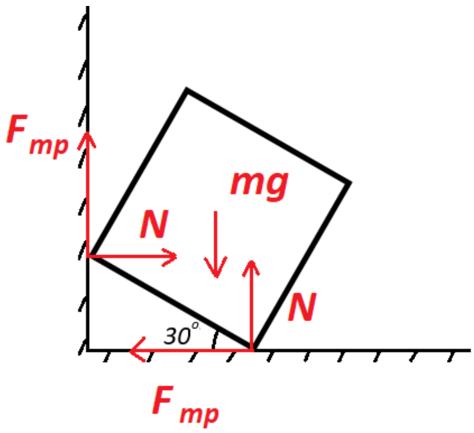
5. *(20 баллов)* Однородный кубик прислонен к стенке как показано на рисунке. Силы трения между кубиком и стенкой и между кубиком и полом равны между собой $F_{\text{тр1}} = F_{\text{тр2}} = 7$ Н. Силы реакций со стороны стенки и пола также равны между собой $N_1 = N_2$. Определите массу кубика. Ускорение свободного падения $g = 10\ \text{м/с}^2$



Ответ: 1,4 кг

Решение*:*

Расставим силы, действующие на кубик.



Из второго закона Ньютона получаем:

$F_{тр} = N.$

$F_{тр} + N = mg.$

Получаем, что:

$m = \frac{2F_{тр}}{g} = \frac{2 \cdot 7}{10} = 1{,}4$ кг.

6. *(15 баллов)* Камень бросили с высоты h со скоростью $v_0 = 25$ м/с под углом к горизонту. Через $t = 8$ с камень упал на горизонтальную поверхность Земли. С учетом того, что минимальная скорость камня за время полета $v_{мин} = 15$ м/с, определите значение h. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Ответ: 160 м

Решение:

Минимальная скорость:

$v_{мин} = v_0 \cos\alpha = 15$ м/с. (3 балла)

Следовательно:

$v_0 \sin\alpha = \sqrt{v_0^2 - (v_0 \cos\alpha)^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$ м/с. (5 баллов)

Уравнение движения:

$y = 0 = h + v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{g}{2}t^2 = h + 20 \cdot 8 - 5 \cdot 8^2.$ (5 баллов)

Получаем: $h = 160$ м. (2 балла)

11 класс **Отборочный этап** **2024-2025**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*16 баллов*) Найдите наименьшие положительные значения x, y, удовлетворяющие уравнению $(\sin x + \cos x)(\sqrt{3}\sin y + \cos y) = 2\sqrt{2}$. В ответ запишите их сумму.

Ответ: $\frac{7\pi}{12}$.

Решение. С помощью метода дополнительного угла, уравнение преобразуется к виду: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(y + \frac{\pi}{6}\right) = 1$. Уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1, \\ \sin\left(y + \frac{\pi}{6}\right) = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1, \\ \sin\left(y + \frac{\pi}{6}\right) = -1. \end{cases} \end{array}\right.$ Откуда $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z, \\ y + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z; \end{cases} \\ \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z, \\ y + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in Z. \end{cases} \end{array}\right.$ Получаем $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z, \\ y = \frac{\pi}{3} + 2\pi m, m \in Z; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z, \\ y = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi l, l \in Z. \end{cases} \end{array}\right.$ Тогда сумма наименьших и положительных значений $x + y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$.

2. (*17 баллов*) Пусть $h(x)$ есть наибольшее значение функции $f(t) = t - t^2$ при $t \leq x$. Решите уравнение $2x^2 - 3x + 3 = 8h(x)$.

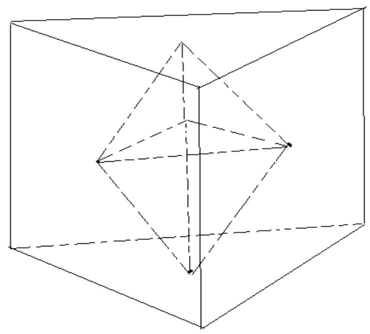
Ответ: $0,5; 1$.

Решение. Имеем $h(x) = \begin{cases} x - x^2, \text{ при } x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{4}, \text{ при } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$ Тогда имеем уравнения $2x^2 - 3x + 3 = 2$ при $x > \frac{1}{2}$ или $2x^2 - 3x + 3 = 8(x - x^2)$, при $x \leq \frac{1}{2}$. Первое уравнение имеет корни $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$. Условию $x > \frac{1}{2}$ удовлетворяет только корень $x = 1$. Второе уравнение $10x^2 - 11x + 3 = 0$ имеет корни $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{5}$. Условию $x \leq \frac{1}{2}$ удовлетворяет только корень $x = \frac{1}{2}$. Итак, корни уравнения $\frac{1}{2}$ и 1.

3. (*17 баллов*) В правильной треугольной призме все боковые грани являются квадратами. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются центры всех граней призмы, если площадь боковой поверхности призмы равна 144.

Ответ: 12.

Решение. В данной призме стороны основания и боковые ребра равны $\sqrt{\frac{144}{3}} = 4\sqrt{3}$. Многогранником является фигура, составленная из двух равных правильных треугольных пирамид, стороны оснований которых равна $2\sqrt{3}$, и высота каждой пирамиды также равна $2\sqrt{3}$.



Получаем объём многогранника $V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{(2\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2\sqrt{3} = 12$.

4. *(15 баллов)* Веревка длиной $l = 5$ м переброшена через маленький, тонкий гвоздь, вбитый в вертикальную стенку. В начальный момент веревка висит симметрично и покоится. В результате незначительного толчка веревка начинает скользить по гвоздю. Найдите скорость веревки в тот момент, когда она соскользнет с гвоздя. Трением пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10\ \text{м}/\text{с}^2$.

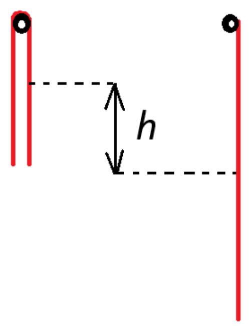
Ответ: 5 м/с

Решение:

Закон сохранения энергии:

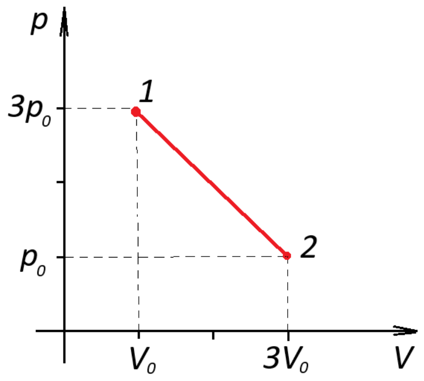
$mgh = \frac{mv^2}{2}$, (7 баллов)

где h – изменение высоты центра масс веревки в «сложенном» и «развернутом» состояниях.



Получаем: $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1{,}25} = 5\ \text{м}/\text{с}$. (8 баллов)

5. *(20 баллов)* С идеальным двухатомным газом происходит процесс 1-2, в ходе которого давление уменьшается в три раза, а объем в три раза увеличивается. Известно, что в ходе этого процесса 50% молекул диссоциировало на атомы. Определите конечную температуру T_2, если известно, что начальная температура $T_1 = 390$ К.



Ответ: 260 К

Решение:

50% двухатомных молекул распалось на одноатомные, следовательно количество вещества увеличилось в 1,5 раза. (8 баллов)

Из уравнения состояния идеального газа $pV = \vartheta RT$ следует, что температура уменьшилась в 1,5 раза. (8 баллов)

Получаем, что: $T_2 = \frac{T_1}{1{,}5} = 260$ К. (4 балла)

6. *(15 баллов)* Незаряженный конденсатор ёмкостью $C = 4$ мкФ присоединили через резистор $R = 100$ Ом к батарейке с ЭДС $\varepsilon = 12$ В и внутренним сопротивлением $r = 5$ Ом. Определите работу источника, совершаемую в ходе полной зарядки конденсатора.

Ответ: $576 \cdot 10^{-6}$ Дж

Решение*:*

Работа источника:

$A = q\varepsilon = C\varepsilon\varepsilon = 4 \cdot 10^{-6} \cdot 12 \cdot 12 = 576 \cdot 10^{-6}$ Дж. (15 баллов)

11 класс **Отборочный этап** **2024-2025**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*16 баллов*) Найдите наименьшие положительные значения x, y, удовлетворяющие уравнению $(\sin x - \cos x)(\sqrt{3}\sin y + \cos y) = 2\sqrt{2}$. В ответ запишите их сумму.

Ответ: $\frac{13\pi}{12}$.

Решение. С помощью метода дополнительного угла, уравнение преобразуется к виду: $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(y + \frac{\pi}{6}\right) = 1$. Уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1, \\ \sin\left(y + \frac{\pi}{6}\right) = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1, \\ \sin\left(y + \frac{\pi}{6}\right) = -1. \end{cases} \end{array}\right.$ Откуда $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z, \\ y + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z; \end{cases} \\ \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z, \\ y + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in Z. \end{cases} \end{array}\right.$ Получаем $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z, \\ y = \frac{\pi}{3} + 2\pi m, m \in Z; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z, \\ y = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi l, l \in Z. \end{cases} \end{array}\right.$ Тогда сумма наименьших и положительных значений $x + y = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{13\pi}{12}$.

2. (*17 баллов*) Пусть $h(x)$ есть наименьшее значение функции $f(t) = t^2 - t$ при $t \le x$. Решите уравнение $2x^2 - 3x - 6 = 4h(x)$.

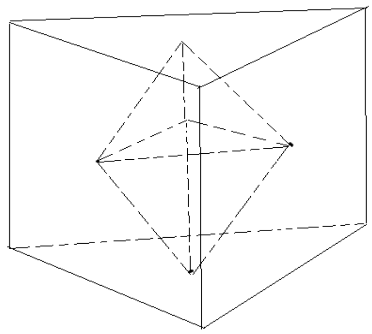
Ответ: 2,5.

Решение. Имеем $h(x) = \begin{cases} x^2 - x, \text{ при } x \le \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{4}, \text{ при } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$ Тогда имеем уравнения $2x^2 - 3x - 6 = -1$ при $x > \frac{1}{2}$ или $2x^2 - 3x - 6 = 4(x^2 - x)$, при $x \le \frac{1}{2}$. Первое уравнение имеет корни $x = \frac{5}{2}$, $x = -1$. Условию $x \le \frac{1}{2}$ удовлетворяет только корень $x = \frac{5}{2}$. Второе уравнение $2x^2 - x + 6 = 0$ корней не имеет. Итак, уравнение имеет единственный корень $x = 2{,}5$.

3. (*17 баллов*) В правильной треугольной призме все боковые грани являются квадратами. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются центры всех граней призмы, если площадь боковой поверхности призмы равна 36.

Ответ: 1,5.

Решение. В данной призме стороны основания и боковые ребра равны $\sqrt{\frac{36}{3}} = 2\sqrt{3}$. Многогранником является фигура, составленная из двух равных правильных треугольных пирамид, стороны оснований которых равна $\sqrt{3}$, и высота каждой пирамиды также равна $\sqrt{3}$.



Получаем объём многогранника $V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{(\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3} = 1{,}5.$

4. *(15 баллов)* Веревка длиной $l = 7{,}2$ м переброшена через маленький, тонкий гвоздь, вбитый в вертикальную стенку. В начальный момент веревка висит симметрично и покоится. В результате незначительного толчка веревка начинает скользить по гвоздю. Найдите скорость веревки в тот момент, когда она соскользнет с гвоздя. Трением пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10\ \text{м}/\text{с}^2$.

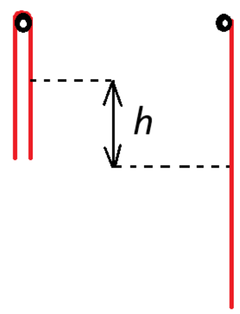
Ответ: 6 м/с

Решение:

Закон сохранения энергии:

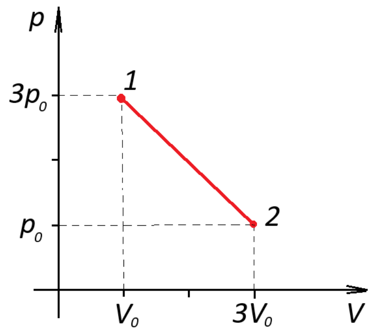
$mgh = \frac{mv^2}{2},$ (7 баллов)

где h – изменение высоты центра масс веревки в «сложенном» и «развернутом» состояниях.



Получаем: $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1{,}8} = 6$ м/с. (8 баллов)

5. *(20 баллов)* С идеальным двухатомным газом происходит процесс 1-2, в ходе которого давление уменьшается в три раза, а объем в три раза увеличивается. Известно, что в ходе этого процесса 25% молекул диссоциировало на атомы. Определите конечную температуру T_2, если известно, что начальная температура $T_1 = 360$ К.



Ответ: 288 К

Решение:

25% двухатомных молекул распалось на одноатомные, следовательно количество вещества увеличилось в 1,25 раза. (8 баллов)

Из уравнения состояния идеального газа $pV = \vartheta RT$ следует, что температура уменьшилась в 1,25 раза. (8 баллов)

Получаем, что: $T_2 = \frac{T_1}{1{,}25} = 288$ К. (4 балла)

6. (15 баллов) Незаряженный конденсатор ёмкостью $C = 8$ мкФ присоединили через резистор $R = 50$ Ом к батарейке с ЭДС $\varepsilon = 4{,}5$ В и внутренним сопротивлением $r = 2$ Ом. Определите работу источника, совершаемую в ходе полной зарядки конденсатора.

Ответ: $162 \cdot 10^{-6}$ Дж

Решение:

Работа источника:

$A = q\varepsilon = C\varepsilon\varepsilon = 8 \cdot 10^{-6} \cdot 4{,}5 \cdot 4{,}5 = 162 \cdot 10^{-6}$ Дж. (15 баллов)